Aula 365
Aprender para crear

RESUMEN

Resumen de → MATEMÁTICA

Combinatoria

La Combinatoria es la parte de la matemática que se ocupa de la resolución de los problemas de elección y disposición de los elementos de cierto conjunto de acuerdo con ciertas elecciones o definiciones.
Para contar de forma organizada todas las opciones posibles que aparecen en algunos casos, es útil realizar un diagrama de árbol, que no es más que una disposición para contar y ordenar elementos.

La Combinatoria se ocupa de la resolución de los problemas de elección y disposición de elementos de cierto conjunto. ¿Para qué puede ser útil?

Combinatoria... ¿y eso qué es?

¿Alguna vez has acomodado enciclopedias siguiendo un orden? Seguro que sí. Igual sabrás que no es la única forma en que los puedes acomodar. Para saber todas las formas en qué podemos ordenar o agrupar elementos, debemos aplicar la Combinatoria. La Combinatoria es una rama de la matemática que se encarga de estudiar las ordenaciones o agrupaciones de un determinado número de elementos.

¡Agrupemos!

Los conjuntos se usan para agrupar elementos. Y con sus elementos podemos hacer subconjuntos. Por ejemplo, veamos el conjunto de las letras que forman la palabra “sol”.

$$U = \{S; O; L\}$$

U es el conjunto de las letras que forman la palabra SOL.

Aquí podemos formar 8 subconjuntos, teniendo en cuenta que pueden formarse con tres, dos, uno y ningún elemento:

$$A = \{S; O; L\}$$
$$B = \{S; O\}$$
$$C = \{S; L\}$$
$$D = \{O; L\}$$
$$E = \{S\}$$
$$F = \{O\}$$
$$G = \{L\}$$
$$H = \{\ \}$$

Con el Conjunto U pueden formarse 8 subconjuntos, incluyendo el conjunto vacío.

¡A tener en cuenta!

Para comenzar a practicar problemas combinatorios debemos tener en cuenta varios conceptos claves:

- **Población:** La población es el conjunto de elementos que estamos estudiando. Y **m** será el número de elementos de este conjunto. En el caso anterior, el conjunto U será nuestra población.
- **Muestra:** Es un subconjunto de la población. Y **n** será el número de elementos que componen la muestra. Cualquiera de los 8 subconjuntos que formamos anteriormente puede considerarse como muestra. Los diferentes tipos de muestra están determinados por:
  - ✓ **Orden:** Si es importante que los elementos de la muestra aparezcan ordenados o no.
  - ✓ **Repetición:** Si algún elemento puede repetirse o no.

¡Factorial de un número natural!

Un concepto muy importante en Combinatoria es el factorial de un número natural. Debemos saber que el **factorial de un número natural** es el producto de los "n" factores consecutivos desde "n" hasta 1. El cual se denota como n!.

$$n! = n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots 3.2.1$$

Fórmula general del factorial de un número natural.

Por ejemplo si deseamos hallar el factorial del número 5, debemos hallarlo de la siguiente manera:

$$5! = 1x2x3x4x5 = 120$$

Representación algebraica del factorial de 5.

El orden… ¿interesa o no?

Imagínate que tenemos cuatro personas para ocupar los cargos de:

- Presidente
- Vicepresidente
- Senador

Una persona no puede ocupar dos cargos, ya que cada cargo tiene una distinta. Podríamos formar distintos subconjuntos donde sí tiene importancia el orden de cada elemento. Así para nuestros cargos de presidente, vicepresidente y senador, y si se postularan las personas:

- W
- X
- Y
- Z

Algunas de las opciones son:

$$A = \{w; x; y\}$$
$$B = \{w; x; z\}$$
$$C = \{x; y; z\}$$
$$D = \{x; y; w\}$$
$$E = \{x; y; w\}$$

Algunos de los subconjuntos que pueden formarse con los cuatro elementos.

Sin embargo hay muchos más. Estas agrupaciones reciben el nombre de **variaciones ordinarias**. Sigue leyendo y sabrás cuántos subconjuntos pueden formarse.

Variaciones ordinarias... ¿y eso qué es?

Las **variaciones ordinarias** o variaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n (m≥n) son todas las posibles agrupaciones ordenadas que podamos hacer de esos elementos. Los cuales cumplen con las siguientes características:

- **No** entran todos los elementos.
- **Sí** importa el orden.
- **No** se repiten los elementos.

En el caso anterior, **m** es la cantidad total de libros, es decir 7, y 4 es la cantidad de elementos que debemos agrupar, es decir **n**.
El número de variaciones ordinarias viene dado por:

$$V_{n,m} = n(n-1).(n-2)\ldots(n-m+1)$$

Fórmula general de la variación ordinaria de dos números naturales.

También podemos calcular las variaciones mediante factoriales:

$$V_{n,m} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Fórmula general de la variación ordinaria de dos números naturales mediante factoriales.

Volviendo al problema anterior, dijimos que m=4 y n=3 por lo tanto, si reemplazamos los valores en la fórmula obtendremos:

$$V_{3,4} = \frac{4!}{(4-3)!}$$

$$V_{3,4} = \frac{4!}{1!}$$

$$V_{3,4} = 24$$

Resolución de la variación con m=4 y n=3.

Por lo tanto, hay 24 formas de formas distintas en que pueden tomarse los cargos. ¡Un montón!

¡Los árboles nos ayudan!

Si tenemos que hacer una bandera de tres franjas horizontales iguales y los colores permitidos para hacerla son:

- rojo,
- azul,
- verde y
- negro.

Pero no podemos repetir los colores en una misma bandera, hay que ver cómo hacerlo. Primero debemos saber cuántas banderas se pueden hacer con esas condiciones. Una puede ser con rojo, azul y negro. Otra con rojo, azul y verde, o con azul, verde y negro. Pero también podemos intercambiar esos colores en las franjas. Entonces para contar de forma organizada todas las opciones posibles que aparecen en algunos casos, es útil realizar un **diagrama de árbol**. Un diagrama de árbol es una disposición para contar y ordenar elementos.

Consideremos la franja superior de la bandera: hay 4 maneras diferentes de elegir el color por los 4 colores que tenemos.

Colores con los cuales pueden formarse las banderas.

Después veamos la siguiente franja: como ya hemos fijado el primer color, sólo quedan 3 posibilidades, o sea, 3 ramas.

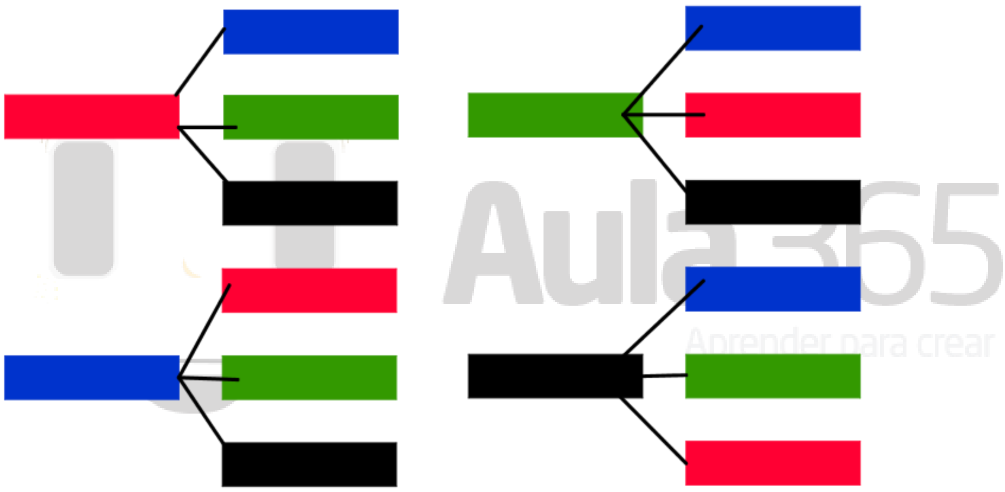

Diagrama de árbol con los colores que pueden formar las banderas.

Por último, para la tercera franja, por la misma razón, sólo quedan 2.

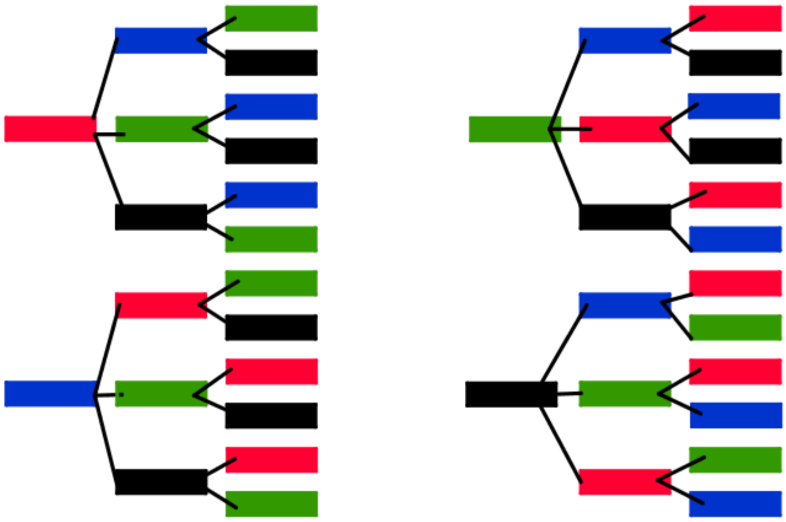

Diagrama de árbol con los colores que pueden formar las banderas.

En total hay 24 banderas. Veremos que por cada elección de la primera franja, que son 4, tenemos 3 de la segunda, es decir que un total de 12 elecciones. Y para cada elección de primera y segunda franja aún tenemos 2 elecciones para la tercera, o sea un total de 24 elecciones.
Si utilizamos la fórmula de variación deberíamos llegar al mismo resultado. En este caso, m será 4 y n será 3.

$$V_{3,4} = \frac{4!}{(4-3)!}$$
$$V_{3,4} = \frac{4!}{1!} = 24$$

Resolución de la variación con m=4 y n=3.

¡A dibujar casillas!

Si en vez de tener cuatro colores y tres franjas, tuviéramos disponibles 10 colores y 5 franjas horizontales, con la misma condición que no se repitan los colores en cada bandera, el diagrama de árbol sería muy grande. Por esta razón, hay otra técnica para contar las alternativas posibles, que es el **diagrama de casillas**. Es similar al diagrama de árbol pero en vez de dibujar todas las ramas, contamos mentalmente todas las posibilidades para cada franja. Hacemos un cuadro con una fila que indique la cantidad de franjas que necesitamos para la bandera y otra con las opciones de colores que tenemos. Luego las multiplicamos para obtener todas las combinaciones posibles.

Representación del diagrama de casillas.

Entonces tenemos que, para la primera franja están los 10 colores disponibles.

Como tenemos 5 franjas y 10 colores, en la primera franja hay 10 posibles colores.

Para la segunda, como ya usamos uno nos quedan 9 para usar.

En la segunda franja hay 9 posibilidades ya que en la primera opción ya se utilizó una.

Luego 8, 7 y 6.

A medida que vamos poniendo las posibilidades en las casillas, como los colores no pueden repetirse, las posibilidades descienden en una unidad.

Como con cada color de los 10 que podemos elegir para la primera franja, los podemos combinar con los otros 9 que nos quedan. Las 90 que quedaron con las dos franjas tienen a su vez la posibilidad de tener una tercera franja con los 8 colores restantes. Por eso hay que hacer 90 por 8 que me da 720.

Y para la cuarta franja, tenemos 7 colores disponibles entonces son 720 por 7 que son 5040. Por último, tenemos una quinta franja con 6 colores permitidos, entonces hago 5040 por 6 y quedan 30240.
Por lo tanto, se pueden hacer:

$$10 \ x \ 9 \ x \ 8 \ x \ 7 \ x \ 6 = 30240$$

Posibilidades de formar las banderas.

¿Y si utilizamos la fórmula de variación? En este caso m será 10 y n será 5

$$V_{5,10} = \frac{10!}{(10-5)!}$$

$$V_{5,10} = \frac{10!}{5!} = 30240$$

Resolución de la variación entre 10 y 5.

Por lo cual llegamos al mismo resultado.

¿Y si los colores se repiten?

También podríamos hacer banderas repitiendo los colores. Hay banderas que tienen franjas de colores repetidos. Para verlo bien, tomemos el primer caso de las banderas. Una bandera con tres franjas horizontales y los colores que podíamos usar eran el rojo, el azul, el verde y el negro, sin repetirlos. Pero ahora pensemos que los colores se pueden repetir. Entonces podríamos hacer una bandera de 3 franjas rojas, o 2 rojas y una negra.
Para la primera franja tenemos disponibles 4 colores, pero si se pueden repetir en la misma bandera, para la segunda franja tendríamos también 4 colores. Y para la tercera franja, los mismos 4 colores.

En caso que los colores se repitan, todas las casillas tendrán las mismas posibilidades.

Si no repetíamos los colores hacíamos 24 banderas. Repitiéndolos podemos hacer 64.
En este estamos frente a una variación con repetición.

¡A variar con repetición!

Las variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n son los distintos grupos formados por n elementos de manera que:

- **No** entran todos los elementos si m >n. **Sí** pueden entrar todos los elementos si m≤n.
- **Sí** importa el orden.
- **Sí** se repiten los elementos.

$$VR_m^n = m^n$$

Fórmula general de la variación con repetición

Si aplicamos esta fórmula al problema anterior obtendremos:

$$VR_4^3 = 4^3 = 64$$

Resolución de la variación con repetición entre 4 y 3.

¡A permutar los colores!

¿Cuántas banderas diferentes de tres franjas horizontales se pueden formar con los colores rojo, amarillo y verde, sin repetir ningún color? Haríamos un diagrama de árbol para ver cuántas podemos formar.

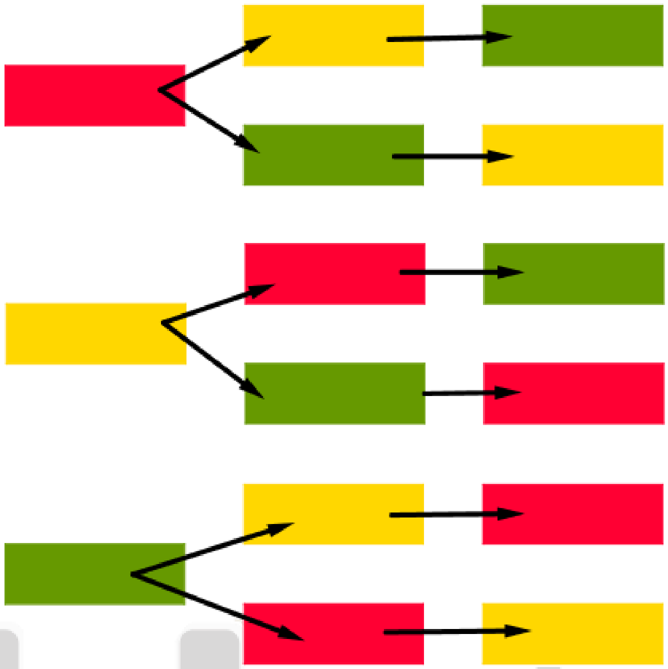

Diagrama de árbol donde se pueden ver las formas en que pueden formarse banderas de tres franjas con tres colores.

Para cada una de las 3 opciones que existen para elegir el color de la primera franja, existen 2 ramas para elegir el color de la segunda franja y por cada una de éstas existe una sola opción para elegir el color de la tercera franja. Entonces resulta que la cantidad total de banderas que se pueden formar cumpliendo las condiciones que pediste son:

$$3x2x1 = 6\ banderas$$

Posibilidades de formar las banderas.

Podemos ver claramente que los colores permutaron entre las franjas de cada bandera. Hicimos todos los ordenamientos posibles de los 3 colores en las 3 franjas.

Permutación... ¿y eso qué es?

Las permutaciones de m elementos (m=n) son las diferentes agrupaciones de esos m elementos de forma que:

- **Sí** entran todos los elementos.
- **Sí** importa el orden.
- **No** se repiten los elementos.

$$P_n = n!$$

Fórmula general de la permutación de números naturales.

¿Podemos repetir?

¿Cuántas banderas distintas de 4 franjas horizontales podríamos formar si 2 franjas deben ser rojas, 1 debe ser azul y la otra debe ser verde?
Debemos hacer un diagrama partiendo de 3 colores en vez de cuatro. Para no confundirnos vamos a diferenciar los colores repetidos con un subíndice así podemos tratarlos como si fuesen dos colores distintos. Es decir, tendríamos R_1 y R_2. En este caso haríamos permutaciones de cuatro colores distintos, por lo cual quedarían 24 banderas distintas.

$$4! = 4x3x2x1 = 24\ banderas$$

Resolución del factorial de 4.

Tomemos alguna de las opciones, por ejemplo, cuando empezamos con el R_1 y con R_2. Al considerar que teníamos 4 colores distintos podíamos hacer 4 permutaciones, quedando 24 banderas posibles. Si tomamos una de esas permutaciones, por ejemplo azul, rojo, verde, rojo, y calculamos cuántas de esos cambios tienen los colores azul y verde en el mismo lugar del ejemplo, obtenemos 2 permutaciones.

$$A - R_1 - V - R_2$$

$$A - R - V - R$$

$$A - R_2 - V - R_1$$

Permutaciones que pueden realizarse cuando un color se repite dos veces.

Pero si le quitamos los subíndices a los dos intercambios del color rojo, tenemos siempre la misma bandera. Por lo tanto, el conjunto total de las 4 permutaciones quedan formados grupos de 2 permutaciones que dan origen a la misma bandera.
Podemos deducir que si por cada dos permutaciones de 2 colores iguales se forma una misma bandera, entonces por las 4 permutaciones de los colores se originan 12 banderas distintas.
Cuando debemos ordenar elementos y algunos de ellos son iguales entre sí, tenemos que contar todas las reordenaciones posibles con todos los elementos y dividirlos por la cantidad de arreglos que se repiten. Es decir, estamos frente a una permutación con repetición.

¡Permutaciones con repetición!

Como vimos anteriormente, existen permutaciones con repetición de n elementos donde el primer elemento se repite a veces, el segundo b veces, y asi sucesivamente.
Es decir, una permutación con repetición son los distintos grupos que pueden formarse con esos n elementos de forma que:

- **Sí** entran todos los elementos.
- **Sí** importa el orden.
- **Sí** se repiten los elementos.

$$PR_n^{a,b,c\ldots} = \frac{P_n}{a!.\,b!.\,c!\ \ldots}$$

Fórmula general de la permutación con repetición de números naturales.

Si reemplazamos esta fórmula en el problema anterior deberíamos obtener el mismo resultado:

$$PR_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

Al reemplazar los valores m=4 y n=2 en la fórmula general, obtenemos como resultado 12.

¿Y si nos sentamos en círculo?

Resolvamos el siguiente problema:

¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?

Existe un caso particular de permutaciones que son las **permutaciones circulares**. Este tipo de permutaciones se utilizan cuando los elementos se ordenan "en círculo", por ejemplo alrededor de una mesa circular, de modo que el primer elemento que "se sitúe" en la muestra determina el principio y el final de la muestra.
En caso que estemos frente a un problema de este tipo, la fórmula que debemos utilizar es la siguiente:

$$PC_n = P_{n-1} = (n-1)!$$

Fórmula general de la permutación circular de números naturales.

Entonces, para saber de cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda, basta con reemplazar el valor en la fórmula:

$$PC_8 = P_{8-1} = (8-1)!$$
$$PC_8 = 7!$$
$$PC_8 = 5040$$

Como son 8 personas sentadas en una mesa circular, la permutación equivaldrá a 7!.

Por lo tanto pueden sentarse de 5040 formas distintas.

¡A combinar!

Resolvamos el siguiente problema:

En una clase de 30 alumnos se quiere elegir un comité formado por 4 alumnos.
¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

Tengamos en cuenta lo siguiente:

- **No** entran todos los elementos.
- **No** importa el orden.
- **No** se repiten los elementos.

Como vimos, este problema no es una permutación (no entran todos los elementos) ni tampoco es una variación (no importa el orden), por lo tanto estamos frente a algo nuevo, frente a una **combinación**.

¡Combinaciones!

Las combinaciones de m elementos tomados de n en n (m≥n) son todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los m elementos de forma que:

- **No** entran todos los elementos.
- **No** importa el orden.
- **No** se repiten los elementos.

$$C_m^n = \binom{n}{m} = \frac{V_m^n}{P_n}$$

Fórmula general de la combinación en números naturales.

También podemos calcular las combinaciones mediante factoriales:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Fórmula general de la combinación en números naturales mediante factoriales.

Ahora que ya sabemos qué son las combinaciones, resolvamos el problema planteado. En este caso m será 30 y n será 4. Al reemplazar estos valores en la fórmula obtenemos:

$$C_{30}^4 = \frac{30!}{4!\,(30-4)!}$$

$$C_{30}^4 = \frac{30!}{4!.\,26!}$$

$$C_{30}^4 = 27405$$

Resolución de la combinación 30 sobre 4.
Alt: Combinación 30 sobre 4.

Por lo tanto, hay 27405 combinaciones posibles. ¡Un montón!

¡A combinar con repetición!

Resolvamos el siguiente problema:

En una fábrica de pastas hay seis tipos diferentes de pastas.
¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro pastas?

Tengamos en cuenta lo siguiente:

- **No** entran todos los elementos.
- **No** importa el orden.
- **Sí** se repiten los elementos.

A diferencia del problema anterior, en este problema los elementos pueden repetirse, ya que podemos combinar cuatro pastas iguales. Por esta razón estamos frente a una combinación con repetición.

¡Combinaciones con repetición!

Las combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n (m≥n), son los distintos grupos formados por n elementos de manera que:

- **No** entran todos los elementos.
- **No** importa el orden.
- **Sí** se repiten los elementos.

$$CR_m^n = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!\,(m-1)!}$$

Fórmula general de la combinación con repetición.

Ahora que ya sabemos la fórmula que debemos utilizar, resolvamos el problema anterior:

$$CR_6^4 = \binom{6+4-1}{4} = \frac{(6+4-1)!}{4!\,(6-1)!}$$

$$CR_6^4 = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4!\,5!}$$

$$CR_6^4 = \binom{9}{4} = 126$$

Resolución de la combinación con repetición de 6 sobre 4.

Es decir, existen 126 posibles combinaciones.

¡A tener en cuenta!

Para que logres diferencias entre combinaciones, permutaciones y variaciones y saber cuándo usar cada una de ellas, te dejamos el siguiente cuadro comparativo:

Tipo	¿Entran todos los elementos?	¿Importa el orden?	¿Se repiten los elementos?	Fórmula
Variaciones ordinarias	No	Sí	No	$V_{n,m} = \frac{m!}{(m-n)!}$
Variaciones con repetición	Sólo si m ≤ n	Sí	Sí	$VR_m^n = m^n$
Permutaciones	Sí	Sí	No	$P_n = n!$
Permutaciones con repetición	Sí	Sí	Sí	$PR_n^{a,b,c\cdots} = \frac{P_n}{a!.b!.c!\ldots}$
Permutaciones circulares	Sí	Sí	No	$PC_n = P_{n-1} = (n-1)!$
Combinaciones	No	No	No	$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$
Combinaciones con repetición	No	No	Sí	$CR_m^n = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$

Existen diferencias entre combinaciones, permutaciones y variaciones

En resumen...

- La Combinatoria es una rama de la matemática que se encarga de estudiar las ordenaciones o agrupaciones de un determinado número de elementos.
- El **factorial de un número natural** es el producto de los “n” factores consecutivos desde “n” hasta 1.
- Las **variaciones ordinarias** o variaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n (m≥n) son todas las posibles agrupaciones ordenadas que podamos hacer de esos elementos.
- Un diagrama de árbol es una disposición para contar y ordenar elementos.
- El **diagrama de casillas** es similar al diagrama de árbol pero en vez de dibujar todas las ramas, contamos mentalmente todas las posibilidades para cada franja.
- Las **permutaciones circulares** se utilizan cuando los elementos se ordenan “en círculo”.